Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

MNU

Jahrgang 57
Heft 1–8
Jan.–Dez. 2004

Bildungsverlag
EINS
Dümmler

ergiebt, so sind nun auch die durch 11 teilbaren Zahlen weggeschafft.
Schafft man in derselben Weise auch alle übrigen durch die verschiedenen Primzahlen teilbaren Zahlen weg, so ergiebt sich schliesslich 1.«
d) Wieso »ergiebt sich schliesslich 1«?
e) Setze jetzt zurück gehend

$$D = \left(1+\frac{1}{7}\right)C \text{ in } \left(1+\frac{1}{11}\right)D\text{, dann für } C = \left(1-\frac{1}{5}\right)B \text{ usw.}$$

ein. Man erhält einen Term, der sich umformen lässt zu

$$A = \frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11-1}\cdot\frac{13}{13+1}\cdot\frac{17}{17-1}\cdot\ldots$$

Führe die Umformungen durch!
EULER schreibt weiter:

»Hierbei kommen in den Zählern alle Primzahlen vor, und eben dieselben Primzahlen sind in den Nennern um 1 vermehrt oder vermindert, je nachdem die betreffende Primzahl von der Form $4m - 1$ oder $4m + 1$ ist.«
f) Beweise, dass für jede Primzahl $p > 2$ gilt: Entweder ist ihr Nachfolger $p + 1$ oder ihr Vorgänger $p - 1$ eine durch 4 teilbare Zahl.
g) Und wo ist jetzt bei diesem merkwürdigen Primzahlenprodukt die Kreiszahl π geblieben?
Finde eine Gleichung mit π.
... Und man gerät ins grübelnde Staunen, was der Kreis und sein Flächeninhalt bzw. sein Umfang mit den Primzahlen zu tun hat ...
Information: Durch seine hier vorgestellte Vorgehensweise gelingt es EULER, die Zahlentheorie mit der Analysis zu verknüpfen. Deswegen gilt er als Begründer der sog. analytischen Zahlentheorie.

REINHARD OLDENBURG

Splines: FAQs und NAQs

Splines sind Biegelinien, die stückweise durch Polynome maximal dritten Grades beschrieben werden. Es ist über sie und ihren Einsatz im Mathematikunterricht schon so viel geschrieben worden, dass eigentlich alles gesagt sein müsste. Die Realität zeigt aber – zuletzt auf der MNU-Tagung in Frankfurt – dass es bei vielen Kollegen offene Fragen rund um Splines gibt. In diesem Artikel werden auf einige dieser FAQs (Frequently Asked Questions) Antworten gegeben. Zusätzlich werden aber auch ein paar Anmerkungen zu Fragen gemacht, die niemand stellt, ob wohl man das tun sollte: Das sind die NAQs, die Never Asked Questions.

FAQ 1: Wie realisiert man Splines als Biegelinien?

Am besten legt man ein Blatt Papier mit Koordinatensystem oder markierten Punkten auf eine Korkplatte, sticht Stecknadeln in die Stützstellen und legt einen elastischen Streifen durch. Geeignetes preiswertes Material ist Plexiglas aus dem Baumarkt (Dicke ca. 1,5 mm, 1 cm breite Streifen schneiden).

FAQ 2: Welche Rolle spielt die Energie des Splines?

Wie alle physikalischen Systeme strebt auch ein elastischer Streifen nach dem Minimum der Energie. Anschaulich ist klar, dass die Energie umso größer ist, je stärker die Krümmung ist. Der genaue Zusammenhang ist aber zunächst unklar. Interessanterweise genügen aber sehr einfache Mechanikkenntnisse für eine Herleitung. Dazu stellt man sich die zu biegende Latte wie in Abbildung 1 gezeigt aus Federn und Stäben zusammengesetzt vor.
Die Ruhelänge der einzelnen Federn oben und unten sei l, der Abstand der beiden Federreihen werde durch starre Stäbe der Länge d gegeben. In dieser Modellvorstellung bedeutet eine Biegung des Stabes, dass sich die Rechtecke zu Trapezen verformen. Ein solches Trapez ist in Abbildung 2 gezeigt. Die obere Feder hat sich ausgedehnt zur neuen Länge $l + x$, während die untere auf $l - x$ verkürzt ist. In der Zeichnung ist die Strecke x

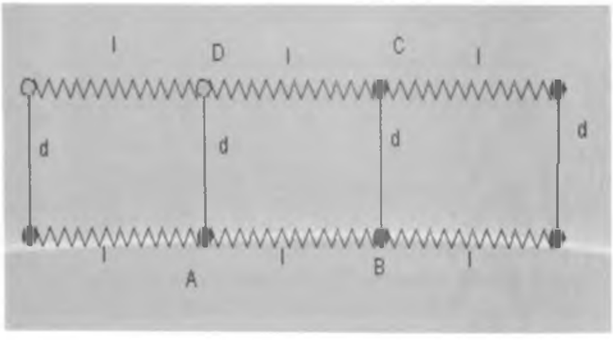

Abb. 1. Federmodell einer elastischen Latte

MNU 57/4 (1. 6. 2004) Seite 214–216 ISSN 0025-5866

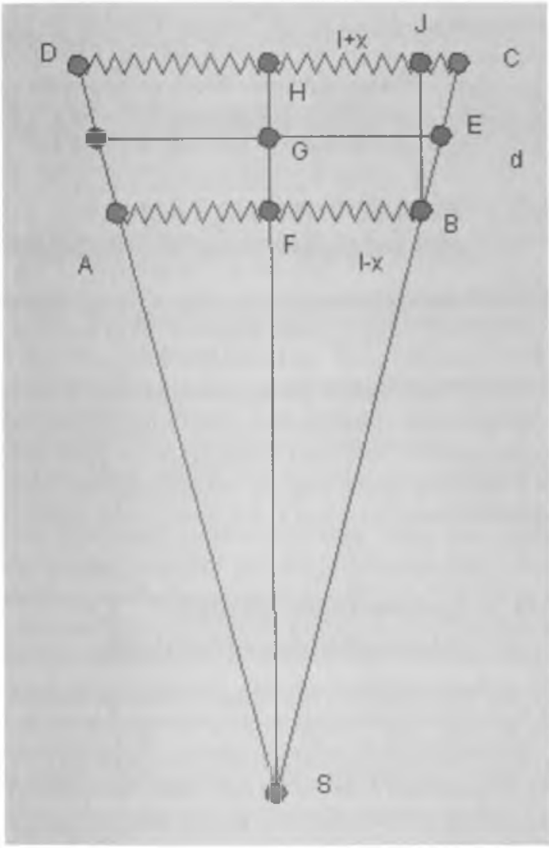

Abb. 2. Eine Zelle ABCD des Modells im gekrümmten Zustand. Die Punkte F, G, H, E, J dienen nur der Rechnung.

als $x = \overline{JC}$ explizit eingetragen. Dazu musste das Lot $\overline{BJ}$ auf $\overline{GE}$ gefällt werden.

Die Abstände $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ haben immer noch die Länge d. Durch die Biegung krümmt sich das Trapez auf einen Kreis mit Mittelpunkt S und mittlerem Radius $r = \overline{SE}$. Die Strecke $\overline{GE}$ ist nicht gedehnt, hat also immer noch die Länge $l/2$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BJC und SGE folgt:

$$\frac{x}{d} = \frac{l/2}{r}.$$

Wenn K die für alle Federn gleiche Federkonstante ist, ergibt sich für die Spannenergie einer Feder:

$$E = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{ld}{2r}\right)^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{ld}{2}\right)^2 k^2$$

wobei $k = \frac{1}{r}$

die Krümmung ist. Damit ist gezeigt, dass bis auf konstante Faktoren das Quadrat der Krümmung die Biegeenergie bestimmt. Die Gesamtenergie der ganzen Latte ergibt sich als Summe über alle Segmente, oder im kontinuierlichen Grenzfall als Integral. Wenn sich die Biegelinie als Funktion $s(x)$ zwischen Stellen a und b darstellen lässt, kann man die Energie berechnen als

$$E[s] = \frac{1}{2}K\left(\frac{ld}{2}\right)^2 \int_a^b \left(\frac{s''(x)}{(1+s'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 dx.$$

Diese unschöne Form verleitet zur folgenschweren Näherung (siehe FAQ 4), die erste Ableitung als klein zu betrachten, und damit den ganzen Nenner wegzulassen. Da man letztlich nur an der Funktion s, nicht aber am Wert der Energie interessiert ist, bietet es sich weiter an, die Vorfaktoren wegzulassen. Derart vereinfacht bleibt

$$E[s] = \int_a^b s''(x)^2 dx.$$

Ein Nachtrag: Die hier durchgeführte Berechnung der Energie durch Diskretisierung ist typisch für viele verwandte Problemstellungen. Wenn dennoch Skepsis überwiegt, könnte es an der Frage liegen, ob die Feinheit der Diskretisierung eine Rolle spielt. Nehmen wir also an, es sei ein Stab der Länge L in n solche Kästchen unterteilt. Für die Federkonstante des ganzen Stabes gilt $K_{ges} = \frac{2K}{n}$, denn es gibt oben und unten Federn (Faktor 2) und bei Hintereinanderschaltung von Federn teilt sich die Federkonstante (die lange Feder ist weicher). Wenn man damit und mit $l = L/n$ in die Energieformel für $2n$ Federn eingeht, sieht man, dass die Gesamtenergie erfreulicherweise gar nicht mehr von n abhängt, so dass insbesondere auch der Grenzübergang für $n \to \infty$ problemlos ist.

FAQ 3: Warum gerade Polynome dritten Grades?

Dass Splines stückweise aus Polynomen dritten Grades bestehen müssen, ergibt sich zwangsweise aus der vereinfachten Energiebedingung nach der

$$E[s] = \int_a^b s''(x)^2 dx$$

minimal werden soll. Um das zu sehen, muss man sich der Variationsrechnung bedienen. Diese ermöglicht das so geliebte Rezept des Optimierens »Ableiten und Null setzten« auch auf solche Funktionale auszudehnen. Wäre E eine Funktion auf einem endlich dimensionalen Vektorraum, wäre eine notwendige Extremumbedingung, dass alle partiellen Ableitungen verschwinden. Hier macht man das entsprechende, wobei die Richtung der partiellen Ableitung durch eine zweite Funktion t gegeben wird. Die gewöhnliche Ableitung lebt von der Untersuchung der Differenz $f(x+\varepsilon) - f(x)$ wobei ε eine reelle Zahl ist, die später im Grenzwert gegen Null geschickt wird. Übertragen auf die Energie, betrachtet man also:

$$\begin{aligned} & E[s + \varepsilon \cdot t] - E[s] \\ &= \int_a^b (s''(x) + \varepsilon \cdot t''(x))^2 dx - \int_a^b s''(x)^2 dx \\ &= \int_a^b (\varepsilon^2 \cdot t''(x)^2 + 2\varepsilon \cdot t''(x) s''(x)) dx \end{aligned}$$

Der erste Summand im letzten Integranden enthält ε quadratisch und wird also den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ nicht überleben, wir schreiben ihn also nur noch symbolisch. Nach einer zweifachen partiellen Integration im zweiten Summanden ergibt sich:

$$=2\varepsilon\left([s''t']_a^b - [s'''t]_a^b + \int_a^b s''''(x)t(x)dx\right) + O(\varepsilon)^2.$$

Der Ableitungs-Grenzwert ist dann

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E[s+\varepsilon \cdot t] - E[s]}{\varepsilon} =$$

$$2\left([s''t']_a^b - [s'''t]_a^b + \int_a^b s''''(x)t(x)dx\right).$$

Die notwendige Extremumbedingung ist, dass dieser Ausdruck Null wird für jedes t innerhalb der zulässigen Funktionsklasse. Wir beschränken uns jetzt auf diejenigen Funktionen, die $t(a) = t(b) = t'(a) = t'(b) = 0$ erfüllen. Dann fallen die ersten beiden Terme in der Ableitung weg. Dann muss der letzte Null sein, das kann aber – bei sonst beliebigem t – nur der Fall sein, falls (bis auf abzählbar viele Ausnahmestellen. die bei einem Integral ja nie eine Rolle spielen) $s''''(x) = 0$ gilt. Dies ist aber gerade die Bedingung, dass s eine Polynomfunktion vom Grade 3 ist.

FAQ 4: Sind Splines koordinateninvariant?

Nein. Das verwundert zunächst, denn die Biegelinie kann als physikalische Observable nicht vom Koordinatensystem abhängen. Die Erklärung liegt in der Näherung, die in FAQ 2 gemacht wurde: Die Energie und die Krümmung sind koordinateninvariant, die erste und zweite Ableitung einzeln aber nicht. Die Näherung $s'(x) \approx 0$ ist also in unterschiedlichen Koordinatensystemen unterschiedlich gut.

FAQ 5: Gibt es auch Koordinatensystem-unabhängige Splines?

Ja, dies sind die so genannten B-Splines. Sie lassen sich aber nicht unbedingt als Funktionen darstellen, müssen also in parametrisierter Form angegeben werden. Das Buch [1] stellt die Theorie dazu übersichtlich dar.

NAQ 1: Wie demonstriert man einen Krümmungssprung?

Das Ziel, auch die zweite Ableitung stetig zu halten, wird oft über das (durchaus gute) Argument begründet, dass man bei einer Unstetigkeit der zweiten Ableitung als Fahrradfahrer längs der Kurve den Lenker ruckartig drehen müsste. Man kann aber auch experimentell mit Hilfe einer Modelleisenbahn vorgehen. Dazu schließt man an ein gerades Gleisstück einen Kreisbogen von 90° an und bestimmt die maximale Geschwindigkeit, mit der ein (möglichst hoch) beladener Güterzugwagen durchfahren kann. Dann tauscht man das Kreissegment gegen ein Stück flexibler Schiene aus (in meinem Fall von der Firma Fleischmann in Spur N) und modelliert damit einen »spline-igen« Übergangsbogen. Erwartungsgemäß kann der Wagen durch ihn schneller fahren [2].

NAQ 2: Sind Splines ein Thema der Analysis oder der Algebra?

Es fällt auf, dass die meisten Autoren das Thema Splines in der zwölften Jahrgangsstufe verorten. Dort kann es als Analysis und Algebra verbindende Fragestellung verschiedenen didaktischen Zielen dienen. Die Grundfragen der Spline-Approximation sind nach Ansicht des Autors klar analytischer Natur und sie haben daher einen natürlichen Platz dort, wo die Begriffe Steigung und Krümmung ausgeschärft werden – also in der elften Jahrgangsstufe.

NAQ 3: Lokale oder globale Informationsvermittlung

Die Berechnung natürlicher Splines erfordert die Lösung eines linearen Gleichungssystems in das alle Gleichungen aller Abschnitte eingehen, und das nicht zerfällt. Intuitiv gesprochen: Alles hängt mit allem zusammen. Das ist ja auch tatsächlich so: Wenn man an einer eingespannten Latte drückt, ändert sich ihr gesamter Verlauf. Dies kann man als globales Verhalten des Splines bezeichnen. Aber woher weiß das Stück am einen Ende, wie es sich verhalten muss, wenn am anderen Ende etwas geändert wird? Die Kraftübertragung (der Impulsstrom) ist natürlich lokal. Mathematisch kann man sich das so klar machen: Wenn Anfangs- und Endpunkt eines Spline-Stücks, sowie Steigung und Krümmung am Anfang gegeben sind, sind diese Werte auch am Ende bestimmt. Der Spline übermittelt also Information. Die energieoptimale Form stellt sich durch lokale Änderung und Übermittlung in einem Relaxationsprozess ein.

NAQ 4: Mit welchem Werkzeug geht die Erzeugung am schnellsten?

Maple: Man gibt eine Liste der Koordinaten der Stützpunkte ein und wählt aus mit der rechten Maustaste »Curve fitting –> spline«. Das Ergebnis kann über die rechte Maustaste sofort gezeichnet werden.

Literatur

[1] G. Farin: Curves and Surfaces for CAGD. – London 1997.

[2] R. Oldenburg: Funktionsdesign – ein handlungsorientierter Zugang mit Computeralgebra. – Staatsexamensarbeit, Göttingen 2000.

[3] H. Knechtel et al.: Mathe open end 1. – Braunschweig 2001.

Dr. Reinhard Oldenburg, Albrechtstr. 5, 37085 Göttingen, roldenburg@gmx.de, ist promovierter Mathematiker und unterrichtet am Felix-Klein-Gymnasium in Göttingen die Fächer Mathematik, Physik und Informatik. Seit 2003 ist er zudem teilabgeordnet an das Göttinger Experimentallabor für junge Leute (XLAB), das eine Brücke von der Schule zur Hochschule schlagen will.